

Experimente zur Bestimmung von Federkonstanten

Theoretische Grundlagen:

I. Herleitung zweier Formeln zur Berechnung der Federkonstante k auf unabhängigen Wegen.

1. über die Kraft F :

$$F = k \cdot s$$

$$\underline{\underline{k = \frac{F}{s}}}$$

Einheitenbetrachtung:

$$[k] = \frac{N}{\underline{\underline{m}}}$$

2. über die Periodendauer T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$\underline{\underline{k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}}}$$

Einheitenbetrachtung:

$$[k] = \frac{kg}{s^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} = \frac{N}{\underline{\underline{m}}}$$

II. Herleitung einer Formel für die Berechnung der resultierenden Federkonstante k_{res} zweier hintereinander angeordneter Schraubenfedern.

Es gilt:

$$s_{ges} = s_1 + s_2$$

$$F_{ges} = F_1 = F_2$$

Gleichungsherleitung:

$$k_{res} = \frac{F_{ges}}{s_{ges}}$$

$$s_{ges} = \frac{F_{ges}}{k_{res}} \quad \text{nach Voraussetzung: } s_{ges} = s_1 + s_2$$

$$\rightarrow s_1 = \frac{F_1}{k_1}; s_2 = \frac{F_2}{k_2}$$

$$\frac{F_{ges}}{k_{res}} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

$$\frac{F_{ges}}{k_{res}} = \frac{F_{ges}}{k_1} + \frac{F_{ges}}{k_2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{k_{res}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}}$$

III. Herleitung einer Formel für die Berechnung der resultierenden Federkonstante k_{res} zweier parallel angeordneter Schraubenfedern.

Es gilt:

$$s_{ges} = s_1 = s_2 \text{ und } F_{ges} = F_1 + F_2$$

Gleichungsherleitung:

$$k_{res} = \frac{F_{ges}}{s_{ges}}$$

$$k_{res} = \frac{F_1 + F_2}{s_{ges}}$$

$$k_{res} = \frac{F_1}{s_1} + \frac{F_2}{s_2}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{k_{res} = k_1 + k_2}}$$

Versuchsdurchführung:

Nachdem man die Versuche ordnungsgemäß anhand der Experimentieranordnung aufgebaut hat, beginnt man die Federkonstante auf die erste Weise (Wegmessung) zu bestimmen. Dies wird realisiert, indem man verschiedene Massestücken an der Feder befestigt und die Wegdifferenz, mittels Lineal, zwischen Ausgangslage und Auslenkungslage bestimmt. Der Vorgang wird nun mit verschiedenen Massestücken an beiden Federn wiederholt.

Danach beginnt man die Federkonstante auf dem zweiten Weg zu bestimmen, indem man eine konstante Masse an der Feder befestigt und nun diese zum vertikalen Schwingen anregt (Feder auslenken). Danach ermittelt man die Periodendauer (Zeit für 10 Schwingungen durch 10 dividiert) mittels Stoppuhr und errechnet aus diesem Wert die Federkonstante. Dieser Vorgang wird aus Gründen der Genauigkeit mehrmals an beiden Federn wiederholt.

Nun folgt die experimentale Bestimmung der Gesamtfederkonstante (Aufgabe 2) bei der Reihenkopplung von zwei Federn. Hierbei wird die Schraubenfeder mit der vermutlich höheren Federkonstante direkt an der Aufhängungsvorrichtung befestigt, die Feder mit der vermutlich geringeren wird am unteren Ende der ersten Feder angebracht. Als nächstes befestigt man an der Massehalterung der zweiten Feder eine konstante Masse und ermittelt wiederum die Periodendauer der Federkopplung, wie oben beschrieben, nachdem man sie zum vertikalen Schwingen angeregt hat. Auch dieser Messvorgang wird aus Gründen der Genauigkeit mehrmals wiederholt.

Danach folgt die Bestimmung der Gesamtfederkonstante (Aufgabe 3) bei der Parallelkopplung von zwei Schraubenfedern. Dabei werden zwei Schraubenfedern mit ähnlicher Federkonstante parallel (Abstand ca. 5 cm) an der Aufhängungsvorrichtung befestigt, die konstante Masse wird jeweils mit einem Ende an der unteren Aufhängung einer Schraubenfeder solide angebracht. Als nächstes regt man die Parallelkopplung zum vertikalen Schwingen an und bestimmt wieder die Periodendauer. Auch bei diesem Versuch wiederholt man die Versuchsdurchführung einige Male, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen.

Aufgaben:

- Bestimmen der Federkonstanten von zwei verschiedenen Schraubenfedern auf zwei unabhängigen Wegen.

Feder 1:

F in N	Δs in cm	k in $\frac{N}{cm}$	m in kg	t in s (10 Schwingungen)	T in s
0,490	1,7	0,288	0,3	8,09	0,809
0,981	4,3	0,228	0,3	8,78	0,878
1,471	6,9	0,213	0,3	8,03	0,803
1,961	9,5	0,206			
2,942	14,8	0,199			

$$\bar{T} = 0,83s \text{ (Mittelwert)}$$

$$\bar{k} = 0,2268 \frac{N}{cm} = \underline{\underline{22,68 \frac{N}{m}}}$$

$$k = k_1 = \frac{4\pi^2 m}{\bar{T}^2} = \underline{\underline{17,1919 \frac{N}{m}}}$$

Feder 2:

F in N	Δs in cm	k in $\frac{N}{cm}$	m in kg	t in s (10 Schwingungen)	T in s
0,098	3,3	0,0297	0,02	6,72	0,672
0,196	6,8	0,0288	0,02	6,63	0,663
0,294	11,0	0,0267	0,02	6,79	0,679
0,392	14,4	0,0272			
0,490	18,0	0,0272			

$$\bar{T} = 0,671s \text{ (Mittelwert)}$$

$$\bar{k} = 0,02792 \frac{N}{cm} = \underline{\underline{2,792 \frac{N}{m}}}$$

$$k = k_2 = \frac{4\pi^2 m}{\bar{T}^2} = \underline{\underline{1,7537 \frac{N}{m}}}$$

- Experimentelle Bestätigung der unter II. hergeleiteten Gleichung für die resultierende Federkonstante aus zwei hintereinander angeordneten Schraubenfedern.

Theoretischer Wert über die Formel:

$$\frac{1}{k_{res}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 0,62839 \frac{m}{N}$$

$$k_{res} = \underline{\underline{1,5914 \frac{N}{m}}}$$

Experimenteller Wert über die Periodendauer T :

m in kg	0,05	0,05	0,05	0,05	$\bar{T} = 1,088s$
t in s	10,97	10,84	11,06	10,65	
T in s	1,097	1,084	1,106	1,065	

$$k_{res} = \frac{4\pi^2 m}{\bar{T}^2} = \underline{\underline{1,6675 \frac{N}{m}}}$$

Differenz zwischen theoretisch und experimentell: $\Delta k = 0,076 \frac{N}{m}$

3. Experimentelle Bestätigung der unter III. hergeleiteten Gleichung für die resultierende Federkonstante aus zwei parallel angeordneten Schraubenfedern.

$$k_1 = 2,12 \frac{N}{m} \quad (\text{extern vorgegeben})$$

$$k_2 = 1,7537 \frac{N}{m} \quad (\text{aus 1.})$$

$$k_{res} = k_1 + k_2 = 3,8737 \frac{N}{m}$$

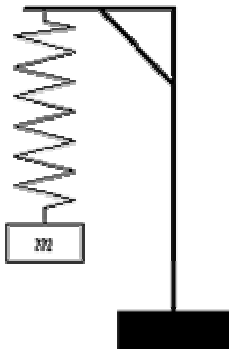
m in kg	0,05	0,05	0,05	0,05	$\bar{T} = 0,786s$
t in s	7,34	7,97	8,16	7,97	
T in s	0,734	0,797	0,816	0,797	

$$k_{res} = \frac{4\pi^2 m}{\bar{T}^2} = 3,1951 \frac{N}{m}$$

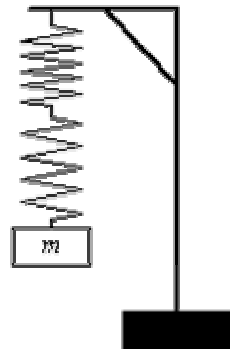
Differenz zwischen theoretisch und experimentell: $\Delta k = 0,6786 \frac{N}{m}$

Experimentieranordnung:

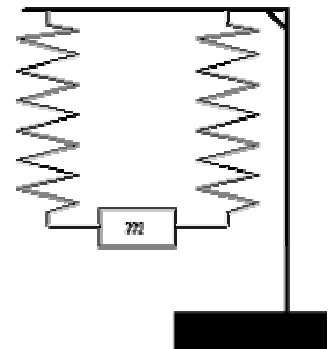
Aufbau 1.:



Aufbau 2.:



Aufbau 3.:



Geräte:

- 3 Schraubenfedern (2 mit ähnlicher Federkonstante)
- Wägesatz
- Stativmaterial
- Lineal
- Stoppuhr

Deutung:

Bei dem ersten Versuch (Bestimmung der Federkonstante auf zwei unterschiedlichen Wegen) entstehen wegbedingte Wertunterschiede. Aufgrund der größeren Abweichung durch die Reaktionszeit sind die Ergebnisse der ersten Messmethode deutlich genauer, d.h. die Messfehler bei der ersten Methode (Bestimmung der Federkonstante über den Weg) sind geringer als bei der zweiten (Bestimmung der Federkonstante über die Periodendauer).

Bei dem zweiten Versuch kann man experimental nachweisen, dass sich bei einer Reihenkopplung von zwei Federn mit unterschiedlichen Einzelfederkonstanten, die Gesamtfederkonstante nach dem Zusammenhang $\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ verhält.

Bei dem dritten Versuch kann man experimental nachweisen, dass sich bei einer Parallelkopplung von zwei Schraubenfedern mit unterschiedlichen Einzelfederkonstanten, die Gesamtfederkonstante nach dem Zusammenhang $k_{ges} = k_1 + k_2$ verhält.

Fehlerbetrachtung:

Systematische Fehler:

- Ungenauigkeit der Messmittel (Abweichung je nach Genauigkeitsklasse)
- keine reibungsfreie Schwingung/Aufhängung
- keine ungedämpfte Schwingung
- Pendelbewegungen der Federn beim Schwingen
- Federn nicht masselos
- Externe, möglicherweise ungenaue, Vorgabe der Federkonstante

Zufällige Fehler:

- Ungenaueres Ablesen der Messgeräte
- Reaktionszeit bei der Zeitmessung
- Beim Anregen der Schraubenfedern zum Schwingen wird ihr gleichzeitige eine Pendelbewegung durch die Hand zugeführt